

Le groupe de Brauer non ramifié sur un corps global de caractéristique positive

Giancarlo Lucchini Arteché

*Département de mathématique, université Paris-Sud
bâtiment 425, 91405 Orsay cedex, France
giancarlo.lucchini@math.u-psud.fr*

Résumé

En utilisant un théorème de Gabber sur les altérations, on démontre un résultat décrivant la partie de torsion première à p du groupe de Brauer non ramifié d'une variété V lisse et géométriquement intègre sur un corps global de caractéristique p au moyen de l'évaluation des éléments de $\text{Br } V$ sur ses points locaux.

Mots clés : Groupe de Brauer, corps global, altération.

Abstract

The unramified Brauer group over a global field of positive characteristic. Using a theorem of Gabber on alterations, we prove a result describing the prime-to- p torsion part of the unramified Brauer group of a smooth and geometrically integral variety V over a global field of characteristic p by evaluating the elements of $\text{Br } V$ at its local points.

Key words: Brauer group, global field, alteration.

1 Introduction

Dans [4], Harari démontre le résultat suivant, lequel était déjà apparu (sous une forme quantitative plus précise) dans le cas de l'espace projectif chez Serre pour les éléments de 2-torsion du groupe de Brauer (cf. [9]) :

Théorème 1.1 (Théorème 2.1.1 de [4]). *Soient K un corps de nombres et X une K -variété géométriquement intègre, projective et lisse, dont on note $K(X)$ le corps de fonctions. Soient α un élément de $\text{Br}(K(X))$ qui n'est pas dans $\text{Br } K$ et U un ouvert de Zariski non vide de X tel que $\alpha \in \text{Br } U$. Alors, il existe un ensemble infini (de densité non nulle) I de places v de K telles que, si l'on note K_v le complété de K par rapport à v , la flèche $U(K_v) \rightarrow \text{Br } K_v$ induite par α prenne une valeur non nulle.*

Il est bien connu qu'il existe un ensemble fini S de places de K tel que, si l'on note $\mathcal{O}_{K,S}$ l'anneau des S -entiers de K , il existe un modèle propre et lisse \mathcal{X} de X sur $\mathcal{O}_{K,S}$ avec un ouvert \mathcal{U} , dont la fibre générique correspond à U , tel que α se relève en un élément de $\text{Br}\mathcal{U}$. Le critère valuatif de propreté nous permet alors de relever tout K_v -point de \mathcal{X} en un \mathcal{O}_v -point de \mathcal{X} dès que $v \notin S$. En particulier, on voit que l'application $U(K_v) \rightarrow \text{Br } K_v$ induite par α se factorise par $\text{Br } \mathcal{O}_v = 0$ dès que le K_v -point de U se relève en un \mathcal{O}_v -point de \mathcal{U} , ce qui nous dit que cette application atteint la valeur nulle pour presque toute place (i.e. pour toute place à l'exception d'un nombre fini d'entre elles). De plus, on obtient une réciproque du résultat qui dit que pour tout élément α de $\text{Br } X$ et pour presque toute place v de K l'application $X(K_v) \rightarrow \text{Br } K_v$ induite par α est triviale. Si l'on considère alors une variété V qui n'est pas propre, ce résultat appliqué à une compactification lisse de V nous permet de décrire le groupe de Brauer non ramifié $\text{Br}_{\text{nr}} V$ d'après les théorèmes de pureté de Grothendieck (cf. [2, Proposition 4.2.3]).

Soit maintenant K un corps global de caractéristique $p > 0$, i.e. le corps de fonctions d'une courbe C sur un corps fini. La preuve du théorème de Harari est totalement adaptable à ce cas, sauf pour le fait que la preuve se base sur les théorèmes de pureté de Grothendieck, lesquels ne sont valables a priori en caractéristique positive que sur la partie de torsion première à p du groupe de Brauer. On peut alors démontrer le résultat suivant en suivant presque mot pour mot la preuve de Harari :

Théorème 1.2. *Soit K un corps global de caractéristique $p > 0$. Soit X une K -variété propre, lisse et géométriquement intègre dont on note $K(X)$ le corps de fonctions. Soit U un ouvert de X et $\alpha \in \text{Br } U \subset \text{Br } (K(X))$ un élément d'ordre n premier à p tel que $\alpha \notin \text{Br } X$. Alors il existe un ensemble infini (de densité non nulle) I de places v de K telles que l'application $U(K_v) \rightarrow \text{Br } K_v$ induite par α soit non triviale.*

Si l'on considère maintenant une K -variété V qui n'est pas propre, il n'est pas a priori évident que l'on puisse utiliser ce résultat pour décrire le groupe $\text{Br}_{\text{nr}} V\{p'\}$, où $\{p'\}$ veut dire que l'on prend les éléments de torsion première à p , car on ne dispose pas d'équivalent en caractéristique positive au théorème d'Hironaka sur la résolution des singularités, donc l'existence d'une compactification lisse de V n'est pas assurée. Cependant, grâce à un résultat de Gabber qui précise le théorème de De Jong sur les altérations (cf. [7, Exp. X, Theorem 2.1]), Borovoi, Demarche et Harari ont récemment démontré le sens "facile" de cette description (cf. [1, Proposition 4.2]), i.e. que pour tout élément α de $\text{Br}_{\text{nr}} V\{p'\}$ et pour presque toute place v de K l'application $V(K_v) \rightarrow \text{Br } K_v$ induite par α est triviale.

En utilisant le même résultat de Gabber, on peut montrer une version affaiblie de la réciproque. Le but de ce texte est d'en donner la démonstration.

2 Résultat principal

Le résultat est le suivant.

Théorème 2.1. *Soient K un corps global de caractéristique p et V une K -variété lisse et géométriquement intègre. Soit $\alpha \in \text{Br } V$ un élément d'ordre n premier à p . Alors α appartient à $\text{Br}_{\text{nr}} V$ si et seulement si, pour presque toute place v de K , l'application $V(L) \rightarrow \text{Br } L$ induite par α est nulle pour toute extension L/K_v finie et purement inséparable.*

Remarque. L'auteur ignore si cette version affaiblie du résultat est optimale ou pas, i.e. s'il suffit de regarder les K_v -points et non pas les L -points pour toute extension L/K_v purement inséparable. La démonstration actuelle ne laisse aucune piste sur comment arriver à un tel résultat.

Il est cependant important de remarquer que ce défaut n'est en général pas gênant au moment des applications, comme on le verra à la fin du texte.

Démonstration. L'un des sens ayant déjà été démontré, il suffit de se concentrer sur le cas où $\alpha \notin \text{Br}_{\text{nr}} V$. Il faut alors trouver une infinité de places v de K , des extensions purement inséparables L/K_v et des L -points P de V tels que $\alpha(P) \neq 0$. On note aussi que, puisque $\text{Br } V$ est un groupe de torsion, on peut supposer que α est d'ordre ℓ^m pour un certain $\ell \neq p$ premier et $m \geq 1$.

Le théorème de Nagata (cf. [3]) nous dit qu'il existe une K -compactification X de V qui n'est pas forcément lisse, i.e. une K -variété propre X munie d'une K -immersion ouverte $V \hookrightarrow X$. Le théorème de Gabber nous dit alors qu'il existe une extension finie de corps K'/K de degré premier à ℓ et une ℓ' -altération $X' \rightarrow X_{K'}$, i.e. un morphisme propre, surjectif et génériquement fini de degré premier à ℓ , avec X' une K' -variété lisse. On en déduit que X' est propre et lisse sur K' . De plus, on peut supposer que X' est géométriquement intègre. En effet, quitte à prendre une composante connexe de X' dominant X , on peut supposer qu'elle est connexe. Il suffit alors de noter que la factorisation de Stein assure l'existence d'une factorisation $X' \rightarrow \text{Spec } K'' \rightarrow \text{Spec } K'$ telle que X' est géométriquement connexe sur K'' , donc quitte à changer K' par K'' (extension qui reste de degré premier à ℓ car $[K'' : K']$ divise $[K'(X') : K'(X)]$), on a que X' est géométriquement intègre sur K' car elle est lisse et géométriquement connexe. On a alors le diagramme commutatif suivant, où les carrés sont cartésiens et les flèches \hookrightarrow représentent des immersions ouvertes :

$$\begin{array}{ccc} V' & \hookrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_{K'} & \hookrightarrow & X_{K'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \hookrightarrow & X \end{array}$$

Puisque $\alpha \notin \text{Br}_{\text{nr}} V$, on sait qu'il existe un anneau de valuation discrète A de corps de fractions $K(V)$ et corps résiduel $\kappa \supset K$ tel que l'image de α par

l'application résidu

$$H^2(K(V), \mu_{\ell^m}) \rightarrow H^1(\kappa, \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}),$$

est non nulle, cf. par exemple [2, §2]. Soit $K_0/K(V)$ la sous-extension séparable maximale de $K'(V')$. En considérant la fermeture intégrale de A dans K_0 et en localisant en un idéal premier convenable on trouve un anneau de valuation discrète $A_0 \subset K_0$ contenant A , de corps de fractions K_0 , et tel que le produit $e_{A_0/A} f_{A_0/A}$ soit premier à ℓ , où e et f représentent l'indice de ramification et le degré résiduel respectivement. Si l'on définit alors A' comme la fermeture intégrale de A_0 dans $K'(V')$, on a que A' est un anneau de valuation discrète et que $e_{A'/A_0} f_{A'/A_0}$ est une puissance de p , cf. la preuve de [8, Ch. 4, Proposition 1.31]. Ainsi, on voit que A'/A est une extension d'anneaux de valuation discrète avec $e_{A'/A} f_{A'/A}$ premier à ℓ . De plus, on voit bien que $K'(V')$ est le corps de fractions de A' et que, si l'on note κ' le corps résiduel de A' , on a $\kappa' \supset K'$. Alors, d'après [2, Proposition 3.3.1], on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^2(K(V), \mu_{\ell^m}) & \longrightarrow & H^1(\kappa, \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}) \\ \downarrow \text{Res} & & \downarrow e_{A'/A} \cdot \text{Res} \\ H^2(K'(V'), \mu_{\ell^m}) & \longrightarrow & H^1(\kappa', \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}). \end{array}$$

Soit κ_1 la sous-extension séparable maximale de κ'/κ . On a alors la factorisation suivante de la flèche verticale de droite :

$$H^1(\kappa, \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}) \xrightarrow{e_{A'/A} \cdot \text{Res}} H^1(\kappa_1, \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{Res}} H^1(\kappa', \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}).$$

Puisque l'extension κ'/κ_1 est purement inséparable, si l'on note Γ_{κ_1} et $\Gamma_{\kappa'}$ les groupes de Galois absolus correspondants, il est facile de vérifier que le morphisme canonique $\Gamma_{\kappa'} \rightarrow \Gamma_{\kappa_1}$ est un isomorphisme, ce qui nous dit que la flèche de droite est aussi un isomorphisme, tandis que pour la flèche de gauche on a que $e_{A'/A}[\kappa_1 : \kappa]$ divise $e_{A'/A} f_{A'/A}$ et alors le morphisme est injectif par l'argument classique de restriction-corestriction. En particulier, on voit que l'image $\alpha' \in \text{Br } V'$ de α n'est pas dans $\text{Br}_{\text{nr}} V' \{p'\} = \text{Br } X' \{p'\}$ car l'image de α' dans $H^1(\kappa', \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z})$ est non nulle.

Le théorème 1.2 nous donne enfin un ensemble infini I' de places w de K' telles qu'il existe un K'_w -point P'_w de V' tel que $\alpha'(P'_w) \neq 0$. Ce K'_w -point induit évidemment un K'_w -point Q'_w de $V_{K'}$, donc de V , tel que $\alpha(Q'_w) \neq 0$. Considérons alors la sous-extension séparable maximale $K \subset K_1 \subset K'$. L'ensemble I' , qui est de densité non nulle, induit par restriction un ensemble I_1 de places de K_1 de densité non nulle. D'autre part, on sait que la densité de l'ensemble I_2 des places de K_1 ayant même corps résiduel que la place qu'elles induisent sur K est égale à 1, cf. par exemple [6, p. 215]. On voit alors que le sous-ensemble I de Ω_K formé des places induites par celles dans $I_1 \cap I_2 \subset \Omega_{K_1}$ est de densité non nulle, donc infini. De plus, quitte à enlever les places ramifiées

pour l'extension K_1/K (qui forment un ensemble fini), on peut supposer que l'extension K'_w/K_v est purement inséparable car elle est alors décomposable en une suite d'extensions radicielles de degré p , tout comme K'/K_1 . Les K'_w -points Q'_w conviennent alors. \square

3 Applications

Avec le théorème 2.1, on peut obtenir des versions en caractéristique positive de beaucoup d'autres résultats autour du groupe de Brauer non ramifié des variétés sur un corps de nombres. En voici un exemple pour les espaces homogènes qui est l'analogue d'un résultat de Harari (cf. [5, Proposition 4]).

Théorème 3.1. *Soient K un corps global de caractéristique $p > 0$ et G un K -groupe algébrique fini d'ordre premier à p plongé dans un K -groupe G' semi-simple simplement connexe (par exemple $G' = \mathrm{SL}_n$) et soit $V = G'/G$. Soient G^{ab} l'abélianisé de G et $M = \hat{G}^{\mathrm{ab}}$ son groupe des caractères. Alors le groupe de Brauer non ramifié algébrique $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}, \mathrm{al}} V$ s'identifie au sous-groupe de $H^1(K, M)$ constitué des éléments α ayant la propriété suivante :*

Pour presque toute place v de K , la restriction α_v de α dans $H^1(K_v, M)$ est orthogonale (pour l'accouplement local donné par le cup-produit) au sous-ensemble $\mathrm{Im}[H^1(K_v, G) \rightarrow H^1(K_v, G^{\mathrm{ab}})]$ de $H^1(K, G^{\mathrm{ab}})$.

En outre, on peut avec le théorème 2.1 enlever les hypothèses d'existence d'une compactification lisse dans certains résultats de Borovoi, Demarche et Harari, comme par exemple leur théorème 7.4.b dans [1], en remplaçant bien entendu le groupe de Brauer de la compactification par le groupe de Brauer non ramifié.

Les détails de ces résultats, notamment la preuve des théorèmes 1.2 et 3.1, apparaîtront dans la thèse de doctorat de l'auteur.

Remerciements

L'auteur tient à remercier David Harari pour son support constant pendant la rédaction de cet article.

Références

- [1] Mikhail Borovoi, Cyril Demarche, and David Harari. Complexes de groupes de type multiplicatif et groupe de Brauer non ramifié des espaces homogènes. Preprint : [http ://arxiv.org/abs/1203.5964](http://arxiv.org/abs/1203.5964), à paraître dans a Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 2012.
- [2] J.-L. Colliot-Thélène. Birational invariants, purity and the Gersten conjecture. In *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms*

- and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992), volume 58 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 1–64. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [3] Brian Conrad. Deligne’s notes on Nagata compactifications. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 22(3) :205–257, 2007.
 - [4] David Harari. Méthode des fibrations et obstruction de Manin. *Duke Math. J.*, 75(1) :221–260, 1994.
 - [5] David Harari. Quelques propriétés d’approximation reliées à la cohomologie galoisienne d’un groupe algébrique fini. *Bull. Soc. Math. France*, 135(4) :549–564, 2007.
 - [6] H. Heilbronn. Zeta-functions and L -functions. In *Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965)*, pages 204–230. Thompson, Washington, D.C., 1967.
 - [7] Luc Illusie, Yves Laszlo, and Fabrice Orgogozo. Travaux de Gabber sur l’uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents. Séminaire à l’école polytechnique 2006–2008. Preprint : <http://arxiv.org/abs/1207.3648>, 2012.
 - [8] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Ern , Oxford Science Publications.
 - [9] Jean-Pierre Serre. Spécialisation des éléments de $\mathrm{Br}_2(\mathbf{Q}(T_1, \dots, T_n))$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 311(7) :397–402, 1990.